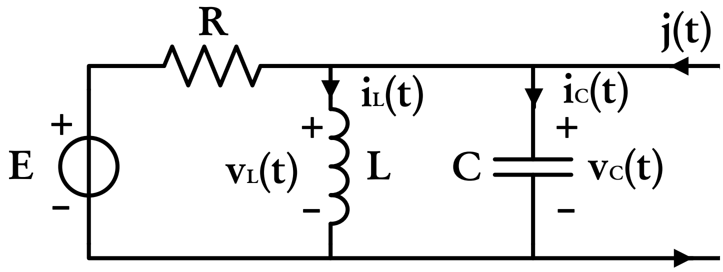
Prova scritta del 12 Febbraio 2015

ESERCIZIO 1

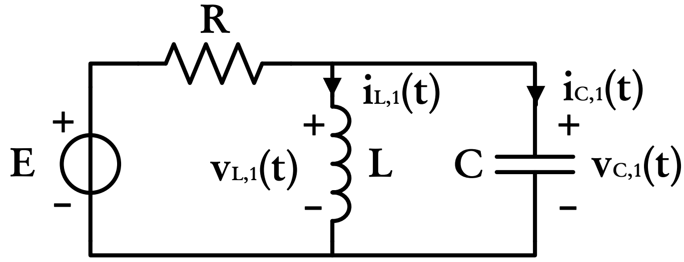
Per la rete mostrata in figura, si determini l'andamento temporale delle due variabili di stato.



Dati: $j(t) = J\ sen\ (\omega t)\ u(t)$, $J = 20\ \alpha$, $\omega = 1\ krad/s$, $E = 100\ \alpha$, $R = \alpha/4$, $L = \alpha\ mH$, $C = 1/\alpha\ mF$.

Svolgimento

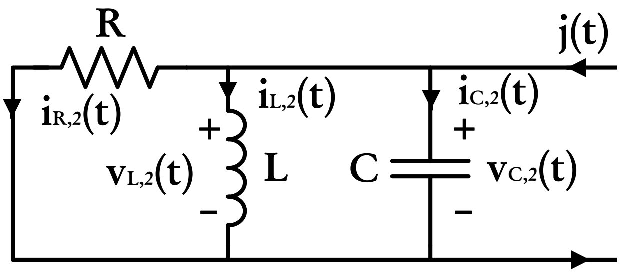
La rete può essere risolta adoperando il principio di sovrapposizione degli effetti. Quando opera il solo generatore di tensione, in ogni istante di tempo, la rete diventa



Il circuito opera in regime stazionario: il condensatore si comporta come un circuito aperto; l'induttore si comporta come un cortocircuito. Quindi, si ha

$$i_{L,1}(t) = \frac{E}{R} = 400, \qquad v_{C,1}(t) = 0.$$

Quando opera il solo generatore di corrente, la rete diventa quella mostrata nella figura che segue.



In questo caso occorre risolvere il transitorio.

Per $t \leq 0$ la rete è a risposo, quindi

$$i_{L2}(t) = 0\,, \qquad v_{C2}(t) = 0.$$

Per la continuità delle variabili di stato

$$i_{L2}(0^+) = i_{L2}(0^-) = 0\,, \qquad v_{C2}(0^+) = v_{C2}(0^-) = 0.$$

Per $t > 0$ le LK impongono che

$$\begin{cases} v_{R2}(t) = v_{L2}(t) = v_{C2}(t) \\ i_{C2}(t) + i_{L2}(t) + i_{R2}(t) = j(t) = J\, sen\,(\omega t) \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che

$$i_{R2}(t) = \frac{v_{C2}(t)}{R}, \qquad i_{C2}(t) = C\frac{dv_{C2}(t)}{dt}, \qquad \frac{di_{L2}(t)}{dt} = \frac{v_{C2}(t)}{L}.$$

Derivando la seconda equazione del sistema, e sostituendo in essa le precedenti, dopo semplici passaggi matematici si ottiene

$$\frac{d^2 v_{C2}(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_{C2}(t)}{dt} + \frac{v_{C2}(t)}{LC} = \frac{\omega J}{C}\ cos\,(\omega t).$$

La condizione iniziale sulla derivata di $v_{C2}(t)$ si ricava da

$$\frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{i_{C2}(t)}{C} = \frac{j(t) - i_{L2}(t) - v_{C2}(t)/R}{C} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv_{C2}(0^+)}{dt} = 0,$$

e il problema di Cauchy da risolvere è il seguente

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v_{C2}(t)}{dt^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{dv_{C2}(t)}{dt} + \dfrac{v_{C2}(t)}{LC} = \dfrac{\omega J}{C}\ cos\,(\omega t) \\ v_{C2}(0) = 0 \\ \dfrac{dv_{C2}(0^+)}{dt} = 0 \end{cases}$$

L’equazione caratteristico associato all’omogenea è

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\,\lambda\, + \frac{1}{LC} = 0,$$

le cui radici, reali e distinte, sono

$$\lambda_1 = \left(-2 - \sqrt{3}\right) 10^3, \qquad \lambda_2 = \left(-2 + \sqrt{3}\right) 10^3.$$

L’integrale generale dell’equazione omogenea associata è del tipo

$$v_{C2,0}(t) = K_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}} + K_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{t}},$$

mentre l'integrale particolare dell'equazione completa può essere trovato risolvendo la rete nel dominio dei fasori. Quando il circuito opera in regime sinusoidale, induttore e condensatore sono in risonanza:

$$X_L = \omega L = X_C = \frac{1}{\omega C} = \alpha.$$

Il cappio LC si comporta, dunque, come un circuito aperto. Quindi

$$v_{C2,P}(t) = R\, j(t) = R\, J\, sen\,(\omega t) = 5\,\alpha^2\, sen\,(\omega t)\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa è

$$v_{C2}(t) = K_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}} + K_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{t}} + R\, J\, sen\,(\omega t).$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 0\,, \\ \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + RJ\omega = 0\,, \end{cases}$$

la cui soluzione è pari a

$$K_1 = -K_2 = \frac{5}{2\sqrt{3}}\,\alpha^2, \qquad K_2 = -\frac{5}{2\sqrt{3}}\,\alpha^2\,.$$

Per $t > 0$, la tensione ai capi del condensatore è data da

$$v_{C2}(t) = \frac{5}{2\sqrt{3}}\,\alpha^2 \mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}} - \frac{5}{2\sqrt{3}}\,\alpha^2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{t}} + 5\,\alpha^2\, sen\,(\omega t).$$

La corrente circolante nell'induttore si può ricavare come

$$i_{L2}(t) = \; j(t) - i_{R2}(t) - i_{C2}(t)$$
$$= -\frac{5\,(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\;\alpha\,\mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}} + \frac{5\,(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\;\alpha\mathrm{e}^{\,\lambda_2 \mathrm{t}} - 5\,\alpha\,cos\,(\omega t).$$

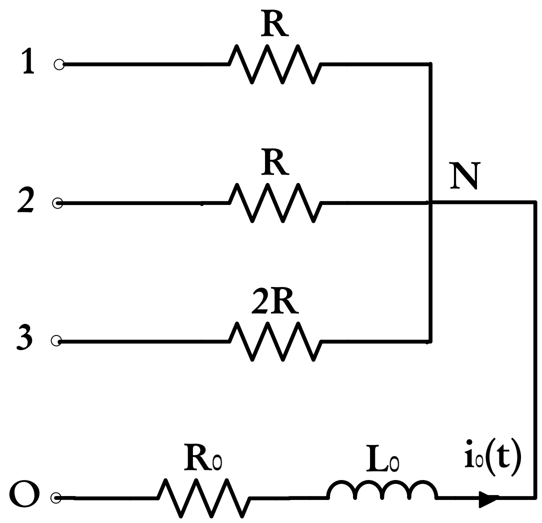
Infine, sommando i risultati ottenuti, si ottiene

$$v_C(t) = v_{C,1}(t) + v_{C,2}(t) = \frac{5}{2\sqrt{3}}\;\alpha^2\mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}} - \frac{5}{2\sqrt{3}}\;\alpha^2\mathrm{e}^{\,\lambda_2 \mathrm{t}} + 5\,\alpha^2\;sen\,(\omega t).$$

$$i_L(t) = i_{L,1}(t) + i_{L,2}(t)$$
$$= 400 - \frac{5\,(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\;\alpha\,\mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}} + \frac{5\,(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\;\alpha\mathrm{e}^{\,\lambda_2 \mathrm{t}} - 5\,\alpha\,cos\,(\omega t).,$$

ESERCIZIO 2

Per la rete trifase mostrata in figura, si determini la corrente $i_0(t)$.



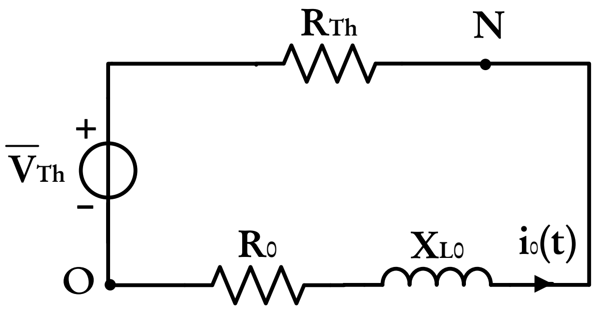
Dati: $v_{12}(t) = V_0\,\sqrt{2}\,sen\,(\omega t)$, $V_0 = 230\,\sqrt{3}\,\alpha$, $\omega = 800\,\pi$, $R = R_0 = 20$, $L_0 = 7/(200\pi)$.

Svolgimento

Passando al regime dei fasori, usando la convenzione dei valori efficaci, si ha

$$v_{12}(t) = V_0\,\sqrt{2}\,sen\,(\omega t) \;\;\rightarrow\;\; \bar{V}_{12} = V_0 = 230\,\sqrt{3}\,\alpha.$$

Per determinare la corrente $i_0(t)$ si può applicare il teorema di Thévenin. La rete si può ricondurre al seguente circuito equivalente



La tensione a vuoto $\overline{V}_{Th}$, è pari allo spostamento del centro stella del circuito trifase:

$$\overline{V}_{Th} = \frac{(\bar{E}_1 + \bar{E}_2)/R + (\bar{E}_3)/(2R)}{2/R + 1/(2R)} = \bar{E}_3 \frac{1/(2R) - 1/R}{2/R + 1/(2R)} = -\frac{1}{5}\bar{E}_3 = -46\alpha\mathrm{j}\,.$$

La resistenza equivalente R_{Th} si ottiene come

$$R_{Th} = R \parallel R \parallel 2R = \frac{2}{5}R = 8.$$

La corrente $\bar{I}_0$ si ottiene facilmente come

$$\bar{I}_0 = -\frac{\overline{V}_{Th}}{R_{Th} + R_0 + jX_{L0}} = \frac{46\alpha\mathrm{j}}{8 + 20 + 28j} = \frac{23\alpha\mathrm{j}}{14\,(1+j)} = \frac{23}{28}\alpha(1+j).$$

Tornando nel dominio del tempo, ricordando che abbiamo utilizzato la convezione dei valori efficaci, si ottiene

$$i_0(t) = \frac{23}{14}\alpha\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$